



NOVEMBER/DECEMBER 2019

BMA51 — ABSTRACT ALGEBRA

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

1. In a group G , if $\forall a \in G, a = a^{-1}$ then, prove that G is abelian.

G என்ற குலத்தில் $\forall a \in G, a = a^{-1}$ எனில் G ஒரு அபிலியன் குலம் எனக் காட்டுக.

2. Define a right coset of a subgroup in a group.

வரையறு : குலத்தில் உள்ள உட்குலத்தின் வலது இணைக்கணம்.

3. Define cyclic group.

வரையறு : வட்டக்குலம்.

4. Define : Normal subgroup of a group.

வரையறு : ஒரு குலத்தின் நேர்மை உட்குலம்.

5. Define even permutation.

வரையறு : இரட்டை வரிசை மாற்றம்.

6. State Cayley's theorem.
கேய்லியின் தேற்றத்தை எழுதுக.
7. Define an integral domain with an example.
எண்ணரங்கத்தை வரையறுத்து எடுத்துக்காட்டு தருக.
8. State pigeonhole principle.
பிஜியன் துவார தத்துவத்தை எழுதுக.
9. Define : Maximal ideal.
வரையறு : மீப்பெரு சீர்வளையம்.
10. Define : a prime element in an Euclidean ring.
வரையறு : யூக்ளிடியன் வளையத்தின் பகா உறுப்பு.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) State and prove Lagrange's theorem.
லெக்ராஞ்சியின் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

Or

- (b) Prove that $\forall a \in G$,
 $Ha = \{x \in G/a \equiv x \pmod H\}$.

நிரூபி $\forall a \in G$,
 $Ha = \{x \in G/a \equiv x \pmod H\}$.

19. If U is an ideal of the ring R , prove that R/U is a ring and is a homomorphic image of R .

U என்பது வளையம் R -ன் ஓர் சீர்வளையம் எனில் R/U ஒரு வளையம் எனவும் R/U ஆனது R -ன் செயலொப்ப பிம்பமாகும் எனவும் நிறுவுக.

20. Show that $J[i]$ is an Euclidean ring.

$J[i]$ என்பது யூக்லீடீயன் வளையம் என காட்டுக.



12. (a) If H and K are two finite subgroups and HK is a subgroup of G then, prove that

$$O(HK) = \frac{O(H)O(K)}{O(H \cap K)}.$$

H, K என்பன G -யின் இரு முடிவுறு உட்குலங்கள் மற்றும் HK -யும் G -யின் உட்குலம் எனில்

$$O(HK) = \frac{O(H)O(K)}{O(H \cap K)} \text{ என நிறுவுக.}$$

Or

- (b) Prove that every subgroup of an abelian group is a normal subgroup.

அபிலியன் குலத்தின் ஒவ்வொரு உட்குலமும் நேர்மை உட்குலம் என நிரூபி.

13. (a) If G is a group and ϕ is an automorphism of G , $a \in G$ is of order $O(a) > 0$ then prove that $O(\phi(a)) = O(a)$.

ϕ என்பது G என்ற குலத்தின் தன் ஒப்புமை மற்றும் $a \in G$ என்பது $O(a) > 0$ வரிசையுடையது எனில் $O(\phi(a)) = O(a)$ என நிறுவுக.

Or

- (b) Prove that every permutation is the product of its disjoint cycles.

ஒவ்வொரு வரிசை மாற்றத்தையும் பொதுவில்லா சுழல்களின் பெருக்கற்பலனாக எழுதமுடியும் என நிறுவுக.

14. (a) Prove that a finite integral domain is a field.

ஒவ்வொரு முடிவறு எண்ணரங்கமும் களமாகும் என நிறுவுக.

Or

- (b) If ϕ is a homomorphism of R into R' with kernel $I(\phi)$, prove that $I(\phi)$ is an ideal of R .

$\phi : R \rightarrow R'$ என்பது $I(\phi)$ என்ற உட்கருவுடன் ஒரு செயல்மாறா கோர்த்தல் எனில் $I(\phi)$ ஓர் சீர்வளையம் என நிறுவுக.

15. (a) If R is a Euclidean ring, $a, b \in R$ and $b \neq 0$ is a unit in R then prove that $d(a) < d(ab)$.

R என்பது ஒரு யூக்ளிடியன் வளையம் $a, b \in R$ மற்றும் $b \neq 0$ என்பது R -ன் அலகு எனில் $d(a) < d(ab)$ என நிரூபி.

Or

- (b) Prove that in a Euclidean ring, d is the g.c.d. of any two elements a, b in R . Also, prove that $d = \lambda a + \mu b$ for $\lambda, \mu \in R$.

ஒரு யூக்ளிடியன் வளையத்தில் எந்த இரு உறுப்புகள் a, b -யிற்கும் மீப்பெரு பொதுக் காரணி d என நிரூபி. மேலும் $d = \lambda a + \mu b$, $\lambda, \mu \in R$ என நிரூபி.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. State and prove Euler's theorem.

ஆய்லரின் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

17. Prove that HK is a subgroup of G if and only if $HK = KH$.

HK என்பது G -யின் உட்குலமாக இருக்க தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை $HK = KH$ என நிறுவுக.

18. Prove that any infinite cyclic groups are isomorphic to $(Z, +)$.

எந்த ஒரு முடிவறா வட்டக்குலமும் $(Z, +)$ -க்கு இயல்மாறாக கோர்த்தலாக இருக்கும் என நிரூபி.